初期和算にみる Archimedean Spiral について (数学史の研究)

小林, 龍彦

数理解析研究所講究録
1130巻 2000年 220-228

初期和算にみる *Archimedean Spiral* について

前橋工科大学工学部　共通教育
小　林　龍　彦

1，はじめに

関孝和編「闕疑抄答術」（年紀不明）の第３９問、第４０問および第４１問には、*Archimedean Spiral* と呼べる曲線が登場している。*Archimedean Spiral* は古代ギリシャ数学の到達した傑作の一つ属する。この曲線はアルキメデス（B.C.２８７頃－２１２）によって、動径上の１点 Pが一定の速さで動くときの点 Pの軌跡として理解されたが、近世日本の数学では運動学とは無縁の問題として論じられた。かつて加藤平左エ門は『和算ノ研究 行列式及円理』[1]において、和算における *Spiral* の研究を取り上げたが、加藤の関心はもっぱら幕末の円理に関連した問題に集中したため、和算初期とくに関孝和と建部賢明・賢弘の *Spiral* の研究については不十分な紹介に終わってしまった。その後の和算史研究において、平山諦らによる『関孝和全集』（大阪教育図書、昭和４９年）でも関孝和の研究業績の一つとして *Archimedean Spiral* が存在することについて触れられてはいるが、関が書き留めた数値や術文を詳細に検討した結果に基づいた業績紹介にはなっていない。そこで関孝和の「闕疑抄答術」と「大成算経」に載る *Archimedean Spiral* について検討をおこなうことで、先行研究の手が及ばなかった部分を補おうとすることが本拙論の目的である。

2，中国と日本における *Archimedean Spiral* の出現について

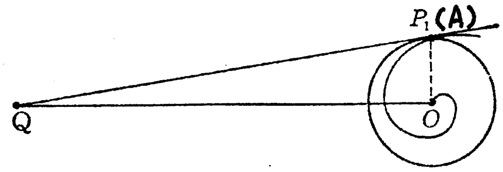
Archimedean Spiral は、

$$r = a\ \theta^{n} \quad \cdots \quad (1)$$

とする対数らせんにおいて、$n=1$の場合を *Archimedean Spiral* と呼ぶ[2]。紀元前３世紀にアルキメデスがこの運動曲線を研究し、著書『らせんについて』において、平面上での点 O を中心として等角速度で回転する動径 OA 上を、初点 O より等速度運動する動点 P の軌跡によって描かれる曲線として論じ、次のような定理を明らかにしている[3]。

1）らせんの一回転の面積は最終動径を半径とする円の面積の１／３である。

2）一回転目の Pの位置 P_1でのこのらせんの接線と、直線 $O\ P_1$に垂直な Oを通る直線との交点を Qとすれば、線分 $O\ Q$ の長さは、半径を $O\ P_1$とする円の周の長さに等しい。



近世日本数学の初期において、アルキメデスのらせんと同種の問題が登場する。しかしそれは動径上の点 Pが等速度で運動をするという運動論に立脚したものではなかった。

東洋におけるこの問題の起源を辿ると、原初的問題を中国古代数学書『九章算術』の第九章勾股にある葛巻き問題に見いだすことが出来る。近世の和算家がこの問題の存在を知

り得たのは、おそらく江戸初期に輸入された程大位の『算法統宗』（万暦２０：１５９２年刊）からであろう。『算法統宗』は『九章算術』をもとに編纂されたものであるが、程は第九章勾股にあった葛巻き問題を巻十六において“難題勾股九”として取り扱った[4]。葛巻問題の本質は三平方の定理の応用であるが、円柱に巻き付く葛の展開図から一般解を導き出すことは難しいと判断したのか、難題と位置づけている。このように難題と指定されたことが和算家の研究意欲を掻き立てる一因となったと思われる。

初期和算では葛巻問題は倶利伽羅巻問題とも呼ばれ、関孝和以前の和算家たちの著した算書にも登場しており、この問題に対する彼らの関心の高さが窺える。初期の倶利伽羅巻は、円柱に紐もしくは縄が絡むものとしても設定されるが、後には本の径と末の径が異なる円柱、すなはち円錐台に紐が絡む問題としても出題された。また、類似問題として笠閇（菅笠）問題も考案された。更には経巻ロ問題[5]としても考えられた。これら関孝和の研究に至る前史的研究を算書ごとに整理しておこう。

経巻ロ：『算法闕疑抄』（万治二：１６５９年）、『童介抄』（寛文四：１６６４年）
『算法根源記』（寛文六：１６６６年）、

倶利伽羅巻：『算法闕疑抄』、『童介抄』、『算法根源記』、『算法勿憚改』（延宝元：１６７３年）、

笠閇：『算法闕疑抄』、『算法根源記』

上記和算書に著された術文を検討すると、彼らは円柱に紐が絡むときは、円柱の展開図を考え、このときの矩形の対角線が紐の総長であると認めた。よって、術としては直角３角形の弦を求めることに帰着させている。しかし、ひとたび円錐台に紐が絡んだ場合には答えを得ることはできなかった。経巻ロでは糸の長さを半円周の総和して計算することが、もっとも進んだ解決法であった[6]。

３，「闕疑抄答術」に表れる *Archimedean Spiral*

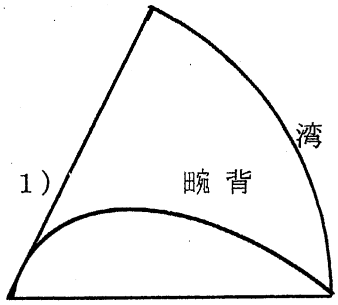
関孝和以前の和算家は *Archimedean Spiral* を半円周の集まったものと見なしていたが、これを円弧とは異なる曲線として取り上げたのは関孝和が最初であった[7]。ただ、関は *Archimedean Spiral* が、動径上の点Ｐが等速度運動する結果として生じたもの、と理解していたかどうかは保留するとしても、関と同時代の和算家と比して、円とは異質な曲線であると捉えていたことは特筆しなければならない。加えて関は、経巻ロ、笠閇および円錐台の場合もすべて畹背の近似式によって求まる、と考えたのである。この *Archimedean Spiral* に関わる関孝和の解法の基本は「闕疑抄答術」と「解見題之法」に明瞭にされている[8]。本拙論の趣旨は「闕疑抄答術」において *Archimedean Spiral* の問題題処理が如何なるものであったかを解明することにあるが、畹背の近似式がどのような形を持っているかを理解するために、まず「解見題之法」に載る畹背術を検討しておこう。以下は『関孝和全集』からの引用である[9]。

仮如有半円闕、半径若干、湾若干、承背準規而週畹形。問畹背。

置半径自乗三之、加入湾冪、共得数為実。以三為廉法、開平方除之、得背。

［題意］右図の扇形の各部分の長さを与えたとき、扇形の広がりとともに生ずる曲線の長さ、すなわち畹背の長さを求めよ。

(図　1)



関孝和はこの問題に対して次のような近似式を示している。

畹背^2＝｛3・半径^2 ＋ 湾^2｝／3　　　… (2)

「解見題之法」において関はどのようにしてこのような曲線が描かれるのか、特別な説明を加えていない。手がかりは“承背準規”である。この意味は題意で述べたように、扇形の広がり即ち円規（コンパス）の開展と共に畹背が生じると解せるから、『明治前日本数学史』も指摘するように[10]、扇形の半径を動径とする *Archimedean Spiral* と判断してよい。

そして畹背は次のようにして作図される。まず図1の扇形の湾を n 等分し、これらの点を扇形の中心と直線で結ぶ。また扇の半径を n 等分して扇形の中心より円弧を描く。このときの相応じる半径と円弧との交点の軌跡を畹背と考えたと思われる（図4参照)。このようにして描かれる曲線は *Archimedean Spiral* そのものであり、「解見題之法」の図は、（1）において、$n<1$ の場合と見なしてよい。

関孝和は続く“解術日”において、畹背の長さを得るために増約術を使うと解説しているが、その意味するところは不明である[11]。よって本拙論では“解術日”の解釈は留保しておく。

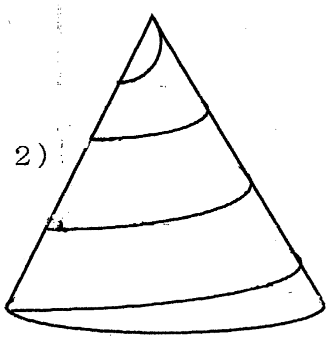
「解見題之法」の畹背の近似式を踏まえた上で、「闕疑抄答術」の検討に移ろう。同書の第３９問、第４０問、第４１問が畹背術の応用問題に該当する。本来は出題順に問題を検討すべきであろうが、第４０問は「解見題之法」の畹背術が応用されていることが明確であること、かつ関孝和は問題解決にあたって第４０問から第３９問へと発展的に考えたと推測できることから、第４０問を最初に検討することにした。以下に問題、答、術文を示そう[12]。

第４０問　今有円錐、径八寸、高三寸、只云如図間各一寸明以糸纏之、問糸長

答　糸長七尺二寸七二四０六強

術日　倍高自乗之得数加入径冪得数寄左列併径冪一十二万六千０二十五段　与間冪三万八千三百０七段　得数以寄左相乗之得数為実以間冪一十五万三千二百二十八段為廉法開平方除之得糸長合問

(図　2)



これら問題、答、術文に続いて、術文中に使用される数値の由来を説明するための補足文３行が付け加えられている。

十二万六千０二十五者　周率冪也　　　…　(ア)

三万八千三百０七段者　径率冪三段也　… （イ）

十五万三千二百二十八段者　径率冪一十二段也　… （ウ）

これらの数字の意味は、関孝和が零約術で求めた円周率の近似分数の分母と分子のそれぞれを自乗したものからなっている[13]。つまり

（ア）＝$355^2 = 126{,}026$

（イ）＝$3 \cdot 113^2 = 3 \cdot 1132$

（ウ）＝$12 \cdot 113^2 = 12 \cdot 1132$

これらの数値は術文を読み解いて行く際の案内人の役割を果たしているが、術文の本旨を捉えるために、ここでは以下のように書き換える。

$\pi = 355 / 113 = \pi_2 / \pi_1$

［題意］底面の直径（$2R$）８寸、高さ（h）３寸とする円錐の母線に、糸が１寸間隔（m）でずれることなく巻き付いている。このときの糸の総長（l）を求めよ。

［答］糸長　７尺２寸７２４０６強

［術文］まず、母線の長さpは、

$$(2 \cdot h)^2 + (2R)^2 = 4p^2 \quad \cdots \quad (3)$$

と求められる。また、

$$\{\pi_2{}^2(2R)^2 + 3 \cdot \pi_1{}^2 \cdot m^2\} 4p^2 \quad \cdots \quad (\text{実})$$

さらに、

$$12 \cdot m^2 \cdot \pi_1{}^2 \quad \cdots \quad (\text{廉})$$

と求める。ここで実を廉で割り、商を平方に開けば総長lが求まる。

以上が関孝和の示した術文である。原形のままでは術文の本質が分からないから、まず術文を整理してみよう。上記式のわり算は、

$$l^2 = \{\pi_2{}^2(2R)^2 + 3 \cdot \pi_1{}^2 \cdot m^2\} 4p^2 / 12 \cdot m^2 \cdot \pi_1{}^2 \quad \cdots \quad (4)$$

となる。だが、関孝和は（４）がなぜ導けるのかを明らかにしていない。そこで式（４）がどのような意味を持っているのかを調べてみよう。（４）を変形して整理すると、

$$l^2 = \frac{\pi_2{}^2 4R^2 p^2}{3 \cdot \pi_1{}^2 \cdot m^2} + p^2 \quad \cdots \quad (5)$$

となる。ところで、$\pi = \pi_2 / \pi_1$だから（５）は

$$l^2 = \frac{(2\pi R)^2}{3} \left(\frac{p}{m}\right)^2 + p^2 \quad \cdots \quad (6)$$

（６）に設問の数値を代入すれば、

l＝７２．７２４０６６８７…[14]

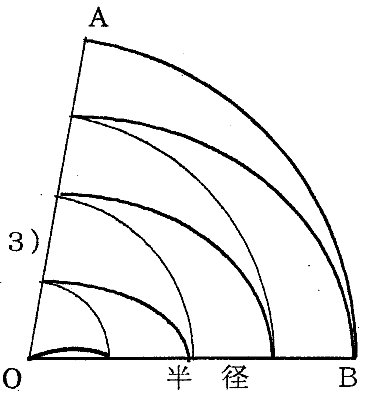
と求まる。ただし、π＝３５５／１１３、p＝５。

問題の本文で示したように、関孝和は l＝糸長７尺２寸７２４０６強とするが、関の“定不尽之強弱”の定義に従えば、強は“五己下を棄て去ること”ことであるから、筆者が得た計算値と答曰が強と表記することとは一致しない。

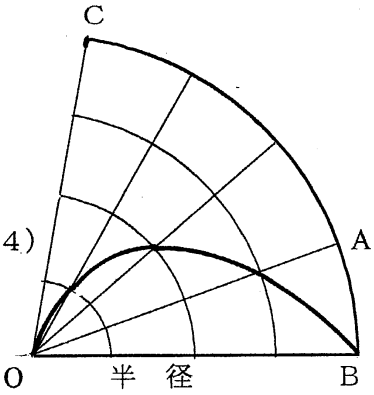
関孝和の術文を理解する鍵は（６）式にある。これは以下のように解釈できよう。

いま、図２の葛の始点と終点を母線に沿って切り開き、展開図を作れば図３を得る。

(図　3)

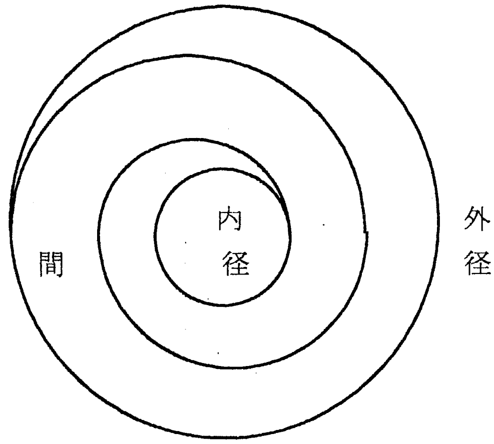


(図　4)



ここで図３の∠ AOB と図４の∠ AOB は等しく、また紐の回転数は図３の半径を間（m）で等分することになるから、図３における回転ごとの扇形を接合して、円弧毎に巻き付いた紐を次々と繋いで行けば、図４を得る。図４の半径は p、湾＝２πr×（P／m）であるから、（６）は「解見題之法」に視た畹背と一致することになる。つまり第４０問は、「解見題之法」の *Archimedean Spiral* を応用した問題に他ならない。

続いて第３９問を見てみよう[15]。



第３９問　今有如図以糸繞之、只云内径二寸、外径八寸、毎一周間各一寸、問糸長

答　糸長　一丈

術　立　　一為糸長、以一百十三相乗之、得内減内外径和三百五十五ヶ、余自之、以間冪相乗之、得数以十二乗之、得数寄甲位。列併内径冪一十二万六千令二十五段間冪三万八千三百〇七段、得数以内径冪乗之、得数寄乙位列併外径冪一十二万六千令二十五段間冪三万八千三百〇七段、得数以外径冪乗之、得内併減甲乙位、余自乗得数寄左。列甲位以乙位相乗之、得数四之、與寄左相消、得開方式、三乗方飜法開之、得糸長合問[16]

［題意］いま内径（２ r）を２寸、外径（２ R）を８寸とする２円の間に、一周毎の間隔（m）を１寸として、糸が畹背のごとく張り巡らされている。このときの内円径と外円径の周長を含めた糸の総長（l）を求めよ[17]。

［答］糸長　一丈

［術文］第４０問と同様に$\pi=\pi_2/\pi_1$として、総長lから内径と外径の周を引けば、

$$\{l\pi_1-(2R+2r)\pi_2\}^2 12m^2 = l^2 12m^2 \quad \cdots \quad 甲$$

次に、内円に描かれる畹背（l_1）を求めると、

$$\{(2r)^2\pi_2{}^2+3m^2\pi_1{}^2\}(2r)^2 = l_1{}^2 12m^2 \quad \cdots \quad 乙$$

また、外径全体に描ける畹背（l_2）は、

$$(2R)^2\pi_2{}^2+3m^2\pi_1{}^2\}(2R)^2 = l_2{}^2 12m^2 \quad \cdots \quad 丙$$

これより、

$$\{丙-(甲+乙)\}^2 = 左_1$$

とおき、また、

$$4\cdot甲\cdot乙 = 左_2$$

得れば、$左_1=左_2$となる。これよりlに関する４次方程式が導け、これを解けば答えを得る。ここまでが第３９問の術文である。よって数値を代入して整理すれば、

$$234788199841^4-29504357856001^3-20572291988256l^2+7116523129315200l+132095417940416400=0$$

この４次方程式を解けば、

$l=$ ９３．３５８０９０４８…

－３０．５２６２３２０８…

８５．８３２２７４９７…

－２３．０００４１６５７…

の４根を得る。ところが、２つの正根とも答と一致しない。この問題の答については、日本学士院本：１２５６と遠藤利貞写本（日本学士院蔵：１２５７）ともに同問題の答に、著者不明の“不審ママ”とする書き込みがある。この書き込みは、「闕疑抄答術」が写本として流布する過程で、“答糸長一丈”とする数値に疑問を持つ和算家が存在していたことを示唆している。しかし、不審としながらも正答を示さなかった理由は定かでない。ただ、正答を表示しなかった理由の１つとして、４次方程式の係数の大きさが後世の和算家に検算を躊躇させたと言えないだろうか。また、lの４次方程式を解いた後、２つの正根の内どちらを答として採用するかも難しい問題であったであろう。関孝和の提出した数値では、次章で取り上げる「大成算経」の同問題と比較して、８５．８３２２７４９７…が答えの候補となる。すると、“不審ママ”と書き込んだ和算家は「大成算経」に同じ問題が乗せられていることを知っていたのであろうか。

4，「大成算経」の畹背術

関孝和が考案した*Archimedean Spiral* の求長式は関の弟子にも継承された。関孝和の晩年、建部賢明を中心に編纂の始まった「大成算経」にその痕跡を視ることが出来る。以下に同書で取り上げられた畹背術の要旨を紹介をしておく。

「大成算経」巻之十五中集の最後を飾る問題が“繞術”であり[18)]、繞術は６問で構成されている。「闕疑抄答術」や「解見題之法」に用いられる用語と比して若干の相違を認めるが、術文などにおける本質的な違いは存在しない。

第１問：湾が１尺３寸、闊（半径）が１尺の時の畹背を求めよ。

答曰　畹背　１尺２寸５分０３３３弱[19)]

「解見題之法」に載る畹背術がまったくそのままに用いられている。以下同様であるため、詳細な解説は省略し、結果のみを紹介していく。

第２問：畹背が円の中心から生じる問題。円径１０寸、畹背の半周ごとの間隙が２寸の時の畹背と外円径の周を併せた総長を求めよ。

答曰　総長　７尺７寸０３５７５弱[20)]

第２問は、総長＝（６）式＋外円径の周で求められる。

第３問：虚径が２寸、実径が３寸、間隙が１寸の時、その内側にある畹背と虚径および実径の円周を併せた総長を求めよ。

答曰　総長　８尺５寸８２２２７強[21)]

この問題は「闕疑抄答術」の第３９問と全く同じ問題である。ここでの三乗方飜法すなはち総長 l を求めるための４次方程式は、

$$
\begin{aligned}
&234788199841\,l^4-2950435785600\,l^3\\
&\quad-20572291882561\,l^2+71165231293520\,0\,l\\
&\qquad+132095417940416400=0
\end{aligned}
$$

となり、これを解けば答に示される数値のほかに、正根９３．３５８０９０４９…を得るが、「闕疑抄答術」の答と同様に、この事実について建部はなにも触れていない。

第４問：直径４寸、高さ１尺２寸の円柱に２寸間隔で糸が巻き付いている。このときの糸の総長を求めよ。

答曰　糸長　７尺６寸３分４７１９弱[22)]

この問題が所謂、倶利伽羅巻問題であり、これの起源が「九章算術」にあることはすでに述べた[23)]。

第５問：底辺の直径が１尺、高さが１尺２寸の円錐に、１寸の間隔で糸が巻き付いている。このときの糸の総長を求めよ。

答曰　糸長　２丈３尺６寸１分５２微弱[24)]

「闕疑抄答術」の第４０問と同じ。よって（６）式を用いて求めればよい。

第６問：下底の直径が１尺５寸、上底の直径が７寸、高さが１尺２寸の円錐台に、１寸の間隔で糸が巻き付いている。このときの糸の総長を求めよ。

答曰　糸長　２丈５尺２寸３分７６６強

第５問の応用問題である。すなはち高さ２尺３寸とする円錐に巻き付く糸の総長を求め、これより高さ１尺１寸の円錐に巻き付いた糸の長さを引けば答えは求まる。（６）式を用いて求めればよい。

４，まとめ

ここまでの議論をもとに、次のような若干の考察を加えて、本拙論における暫定的なまとめに代えたい。まず、関孝和編「闕疑抄答術」の第３９問と第４０問は、間違いなく「解見題之法」に載せられた䀿背術を用いて問題を解いている[25]。そして䀿背とは、*Archimedean Spiral* であり、関孝和はこれの求長に近似式（２）を採用している。また、「大成算経」に載る *Archimedean Spiral* の問題も「解見題之法」に載る䀿背術の応用であることも確かである。「大成算経」の問題配列は整然としており、読者を納得させる構成となっている。

ところで関孝和の䀿背術への着想はいつ頃発生したのであろうか。残念ながらこのことを具体的に考察させる資料は存在しない。しかし、「闕疑抄答術」「解見題之法」「大成算経」の３書の成立過程を鑑みれば、「闕疑抄答術」全体の成立時期を取り敢えず不問にすれば、少なくとも、関孝和が「闕疑抄答術」の著述もしくは編集を終了する段階で䀿背術は成立していたことになる。そして、「大成算経」編纂時には、䀿背術は建部賢明・賢弘らにも秩序立てて理解出来る状態に整理されていた、と指摘できよう。いずれにしても関孝和編「闕疑抄答術」は、楕円周の近似式[26]、πの近似分数さらには弧背の求長[27]という関孝和の円理成立に関わる重要な問題が含まれている一級史料である、と断言できる。

注

１）加藤平左エ門：『和算ノ研究行列式及円理』、東京開成館、昭和１９年。

２）中森寛二：「いろいろな「らせん」」、『数学セミナー』９－８０、１９８０年、pp.２－８.

３）E.J.Dijkstrerhuis:*Archimedes*,Translated by C.Diksboorn,Princeton University Press, 1987,pp.264-277.

４）梅栄照、李兆華校釈：『算法統宗校釈』、安徽教育出版社、１９９０年、p.９２９.

５）経巻口問題は巻子本などの巻口を問題化したものと思われる。

６）有馬頼徸（１７１４－１７８３）が明和６（１７６９）年に出版した『拾璣算法』の第５巻の渦巻き問題は円弧の組み合わせとして解いている。詳しくは『和算ノ研究行列式及円理』、p.317 を見よ。

７）本稿４章で取り上げる「大成算経」では、この曲線を“…弧之状、其周勢宛轉、不応于全円之規、謂之䀿”と指摘している。

８）関孝和の䀿背に関して、加藤平左エ門は“䀿背ヲ論理的ニ取扱ツタ最初ノモノハ関孝和ノ著書解見題之法デアル”と指摘しているが（『和算ノ研究行列式及円理』、p.317)、平山諦の「闕疑抄答術」を関孝和第２番目の著書とする説に従えば、「闕疑抄答術」を䀿背術の最初の記述として認めなければならない。

９）同書、本文ｐｐ.１２８－１２９。

１０）同書、第2巻、pp.１９５－１９６。

１１）この件に関しては、加藤、藤原松三郎、平山などが解釈を試みているが、未だ明確な結論は得られていない。

１２）日本学士院蔵書：１２５６より引用。

１３）「闕疑抄答術」において、本文に見るような数値の解説は本問の他、同第４１問と楕円の周長を求める第４５問のみに施されている。同じ䏊背の近似式が適用される第３９問に数値解説がなされないことは書誌学的に見て奇異と言わざるを得ない。また、逆説的にいえば「闕疑抄答術」全体の著述形式から判断すると、これらの３問のみに数値解説が付せられたことは異例である。このような考察からすると、これらの数値解説が関孝和の手によってなされたものかどうかは疑わしい、と指摘できよう。

１４）本年度の京都大学数理解析研究所での研究集会終了後、同大学名誉教授旦代晃一氏より、第４０問の定積分による計算結果を頂いた。氏の計算によれば、

I＝６３．２７１２７１５５６…

ということである。氏のご教示に感謝申し上げます。

１５）日本学士院蔵書：１２５６より引用。

１６）本文ｐ.６で取り上げた遠藤利貞写本には日本学士院蔵書：１２５６に見るような術文中の脱字もしくは欠字はなく、完全な文章となっている。。

１７）問題には内円径と外円径の周を含めるとする記述はないが、問題と術文を検討すると題意のような内容となっている。このような問題設定は「大成算経」の同種の問題でも確認される。

１８）本稿では下平和夫収蔵本を利用している。なお、下平本の繞術には少なからずの誤記があるが、ここでは一々の指摘は控えた。

１９）ここでの弱は“０３３３<u>３２８８</u>…”を意味している。

２０）ここでの弱は“０３５７<u>４８７２</u>…”を意味している。

２１）ここでの強は“８２２２７<u>４９８</u>…”を意味している。

２２）ここでの弱は“４７１<u>８７８９</u>…”を意味している。

２３）この問題の解法については、Yoshimasa Michiwaki, Tatsuhiko Kobayashi:“On the Resemblance Problems of “*Lilavati*”, “*Chiu-Chang Suan-Shu*” and Wasan”,『富士論叢』第３２巻第１号、１９８７年、pp.１０５－１０６を参照されたい。

２４）ここでの微弱は“５２<u>０２９２</u>…”を意味している。

２５）同第４１問も䏊背術を用いる問題であることは明らかであるが、まだ細部の検討を終えていないことから、本拙論では具体的な議論は保留した。同様の理由から「大成算経」第６問も本稿では保留にしてある。

２６）楕円の近似式については、拙著：「関孝和の楕円の研究について」（『数学史の研究』、京都大学数理解析研究所講究録１０６４、１９９８年１０月）、pp.６３－７４を参照されたい。

２７）弧背の数値については、拙著：「規矩要明算法の弧長の近似式から弧術への道」（『数学史研究』、通巻１５８号、１９９８年、pp.１－１４）を参照されたい。